



Enseignant : Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
14 juin 2024
Durée : 105 minutes















Contrôle 4 (Enoncé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 25 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow (x - 2y + z, 6x + 3y - 9z, -7x - y + 8z).$$

Question 1 (3 points) Quel est le coefficient en haut à gauche dans la matrice (en base canonique) de la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$?

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ 3☐ 1

Question 2 (2 points) Combien f possède-t-elle de valeur(s) propre(s) ?

☐ 2☐ 3☐ 0☐ 1

Question 3 (2 points) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

☐ f est diagonalisable☐ f n'est pas diagonalisable, mais elle est diagonalisable par blocs☐ f n'est pas diagonalisable par blocs☐ f est diagonalisable, mais elle n'est pas diagonalisable par blocs



Pour les **Questions 4, 5, 6** on donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & -\alpha^3 & \alpha^2 \\ 2\alpha + 4 & -\alpha^2 - 2\alpha & \alpha + 2 \\ 2 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

en base canonique, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour combien de valeur(s) de α ...

Question 4 (2 points) ... f est-elle une projection ? *Indication : s'intéresser au rang de f .*

☐ 0☐ 1☐ 2☐ une infinité

Question 5 (2 points) ... f n'est-elle pas diagonalisable ?

☐ 1☐ 0☐ une infinité☐ 2

Question 6 (1 point) ... le plan vectoriel d'équation $z = 0$ est-il stable par f ?

☐ 0☐ une infinité☐ 1☐ 2



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: Cette question est notée sur 8 points.

<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5	<input type="checkbox"/>	.5
<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8											

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \rightarrow (-7x + 4y - 8z, -8x + 5y - 16z, 4x - 4y + 5z).$$

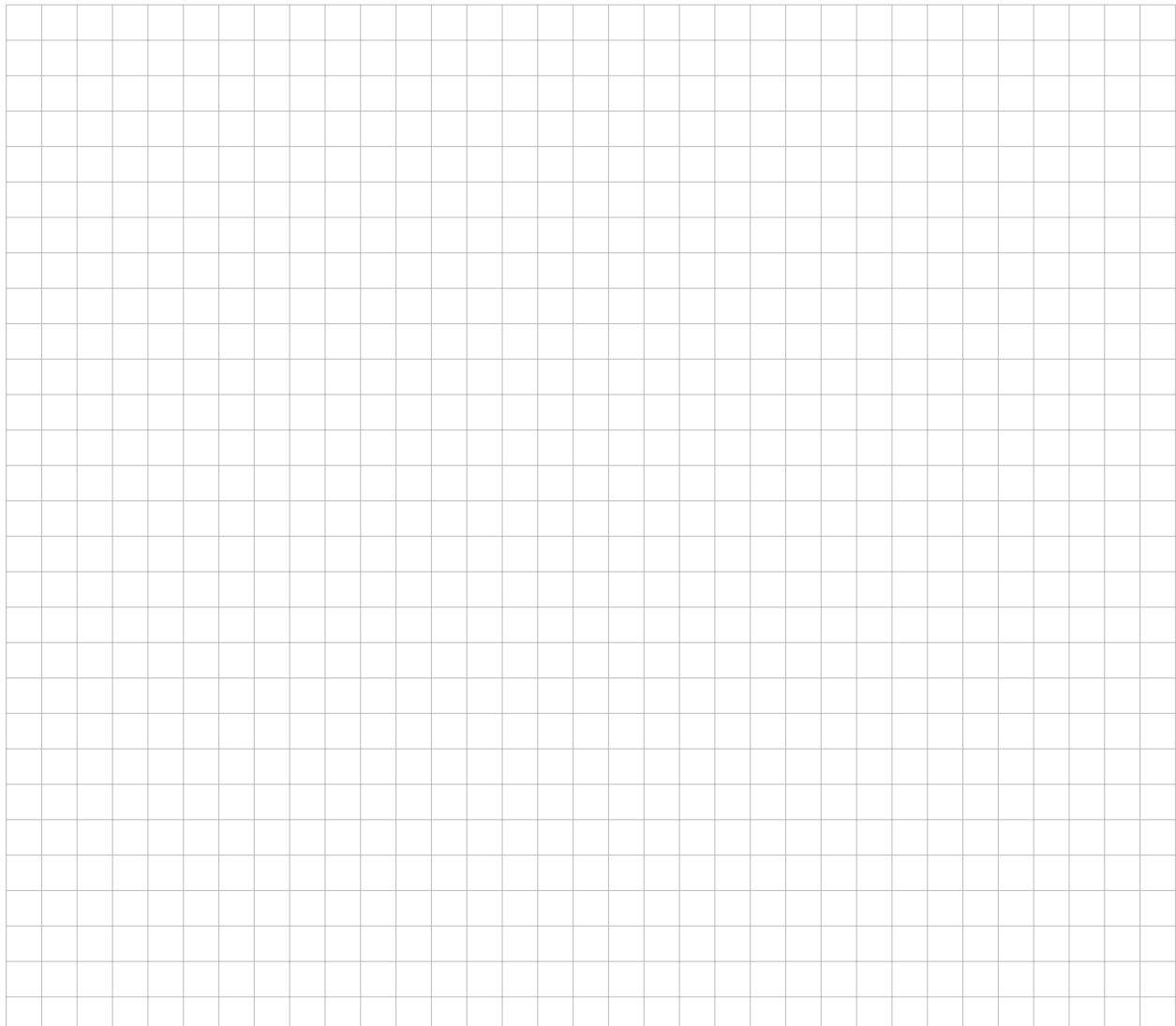
(a) Montrer que le plan vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation :

$$x - y + 2z = 0$$

est stable par f . En déduire une valeur propre de f .

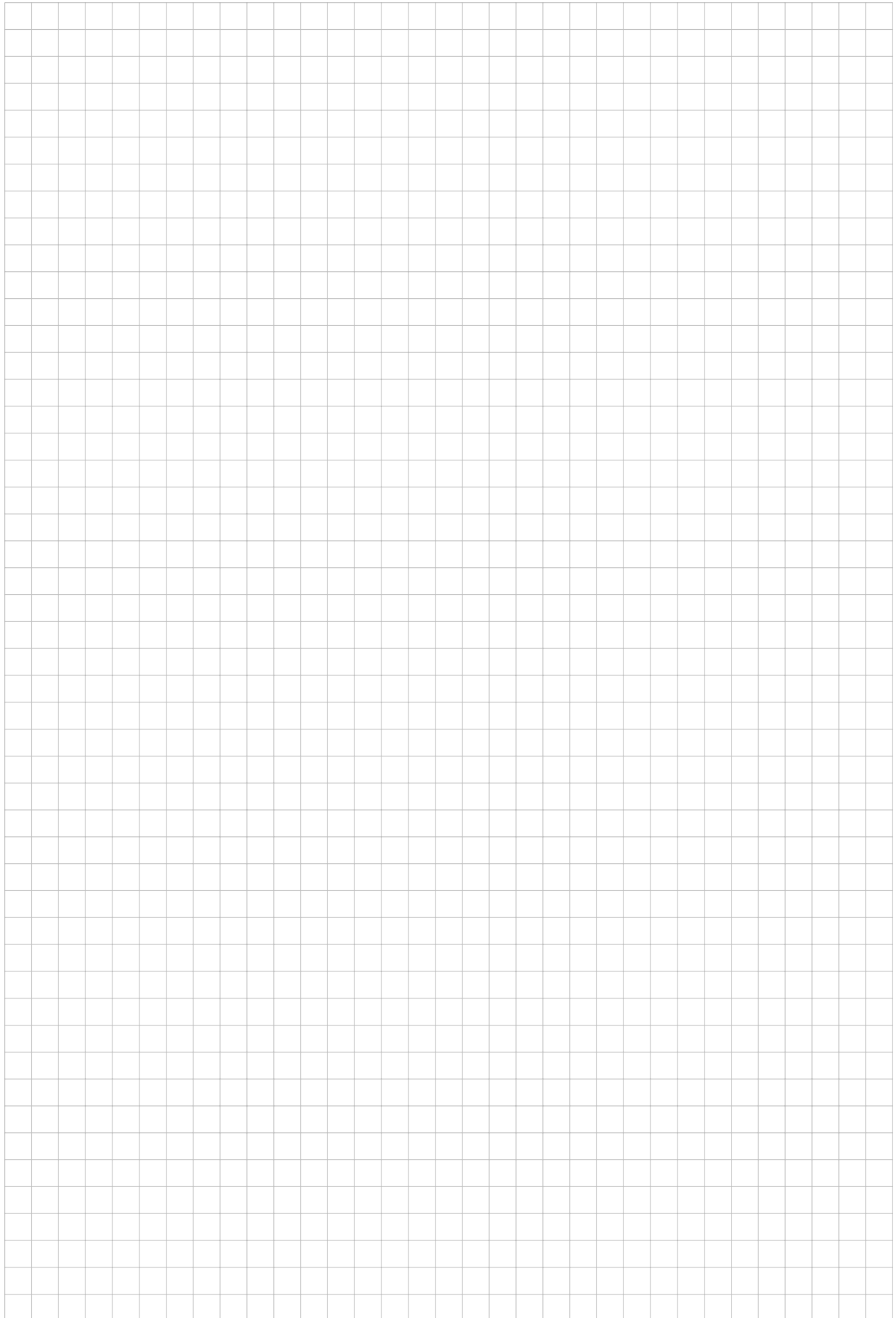
(b) Calculer le polynôme caractéristique de f sous forme factorisée.

(c) Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base propre de f .



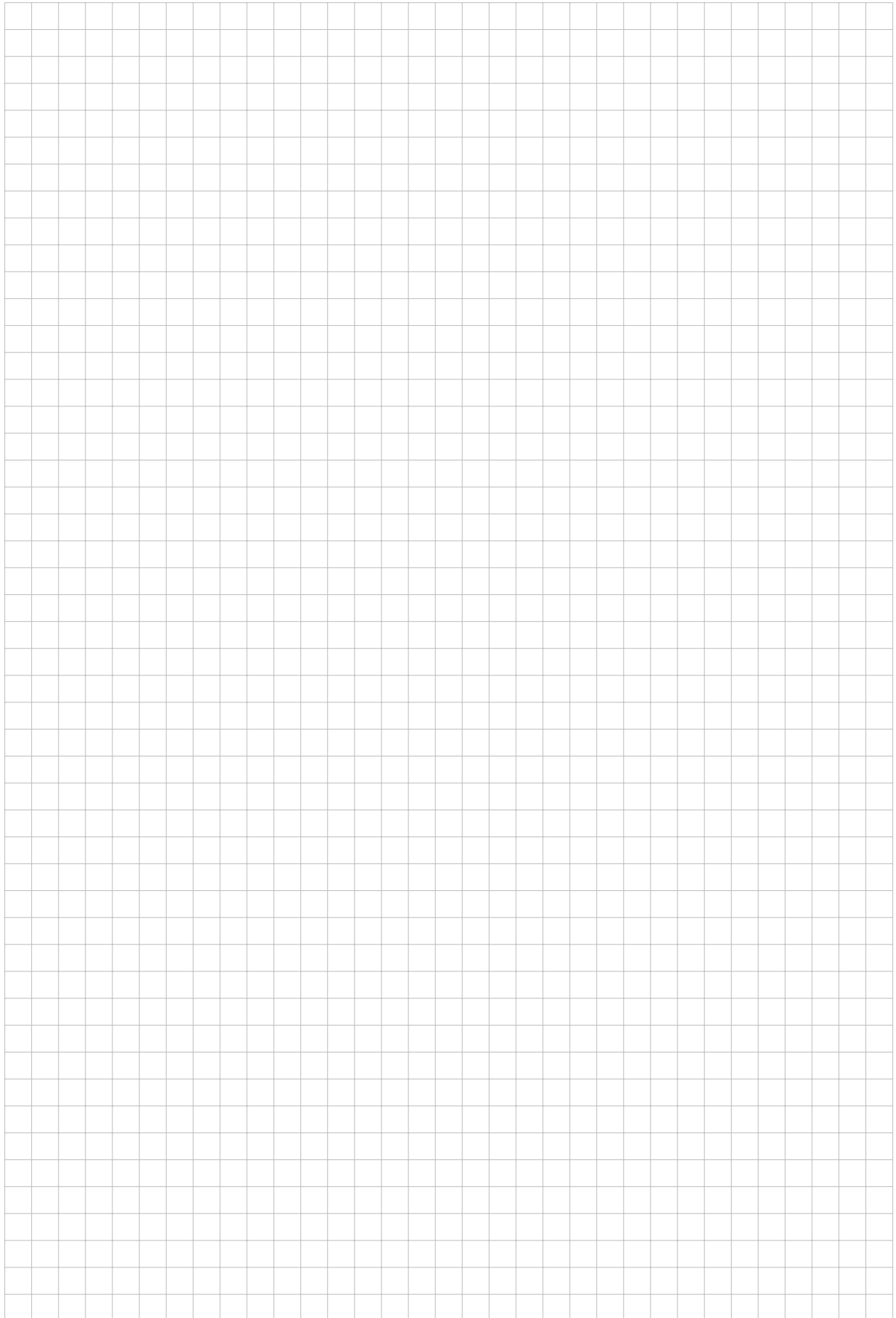


+1/5/56+



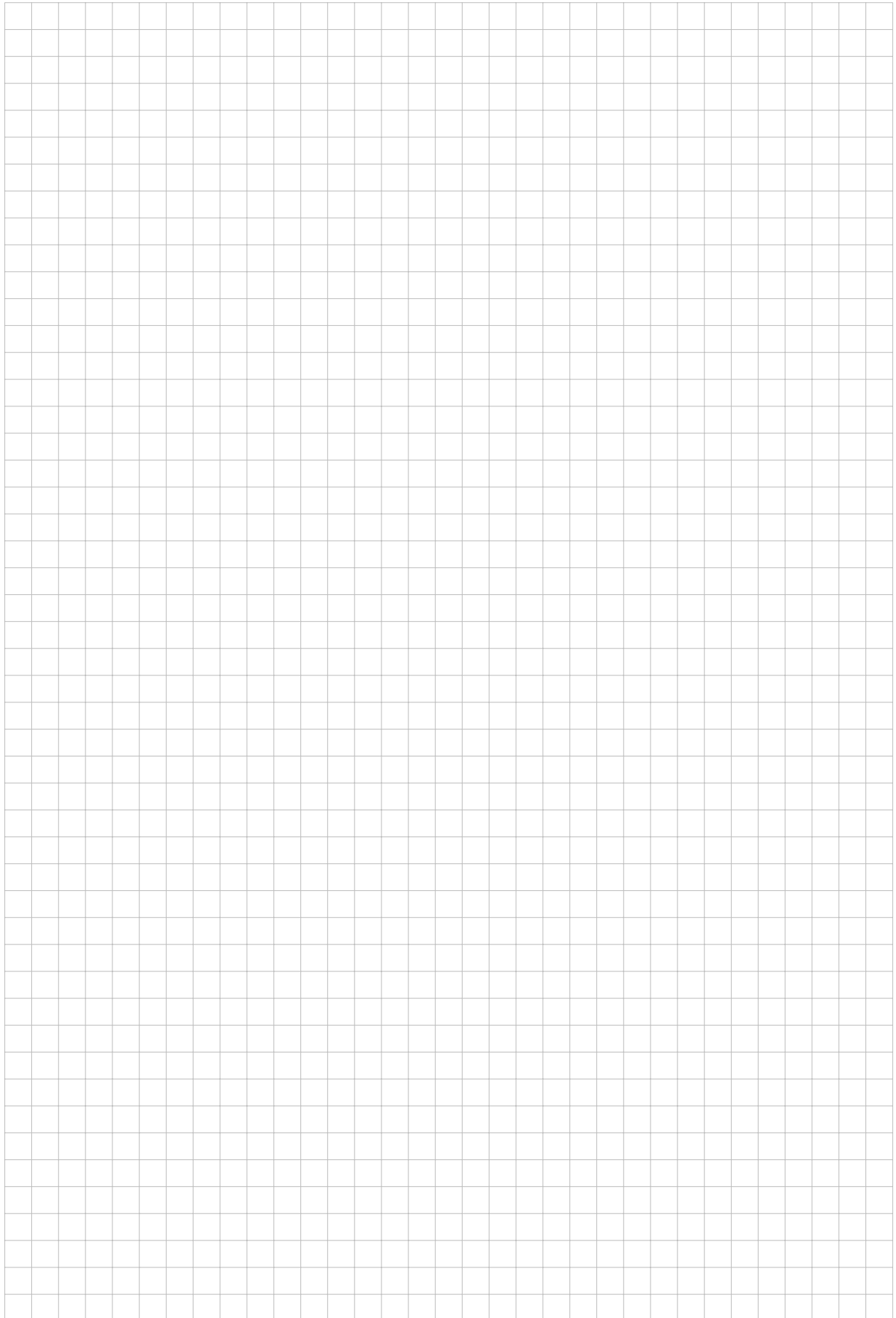


+1/6/55+





+1/7/54+





●





Question 8: Cette question est notée sur 5 points.

<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5	<input type="text"/>	.5		
<input type="text"/>	0	<input type="text"/>	1	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	3	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	5

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on donne :

$$W = \{ P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = P(-1) \}.$$

- (a) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
- (b) Déterminer une famille génératrice de W possédant 3 éléments.
- (c) La famille que vous avez trouvée au (b) est-elle libre ou liée ? Justifier.





+1/10/51+

